Mathematik in der Fußball-Bundesliga
Sollte man die Spiele anders bewerten?

W. Willems

Institut für Algebra und Geometrie
Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität
39016 Magdeburg

Die Spiele in der Fußball-Bundesliga werden bekanntlich mit Punkten bewertet. Für ein gewonnenes Spiel erhält ein Verein drei, für ein Unentschieden einen und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. In einer Saison werden dann die Punkte der einzelnen Spiele aufaddiert und aufgrund der Gesamtpunktezahl die Tabelle erstellt. Bei Punktegleichstand entscheidet das bessere Torverhältnis über die Reihenfolge. In der Saison 2003/04 ergab sich so die folgende Tabelle.

1. Fußball-Bundesliga — Abschluß 2003/04						
	Verein	*G*	*U*	*V*	*Tore*	*Punkte*
1.	Werder Bremen	22	8	4	79:38	74
2.	Bayern München	20	8	6	70:39	68
3.	Bayer Leverkusen	19	8	7	73:39	65
4.	VfB Stuttgart	18	10	6	52:24	64
5.	VfL Bochum	15	11	8	57:39	56
6.	Borussia Dortmund	16	7	11	59:48	55
7.	Schalke 04	13	11	10	49:42	50
8.	Hamburger SV	14	7	13	47:60	49
9.	Hansa Rostock	12	8	14	55:54	44
10.	VfL Wolfsburg	13	3	18	56:61	42
11.	Borussia Mönchengladbach	10	9	15	40:49	39
12.	Hertha BSC Berlin	9	12	13	42:59	39
13. (14.)	SC Freiburg	10	8	16	42:67	38
14. (15.)	Hannover 96	9	10	15	49:63	37
15. (13.)	1.FC Kaiserslautern	11	6	17	39:62	36
16.	Eintracht Frankfurt	9	5	20	36:53	32
17.	1860 München	8	8	18	32:55	32
18	1.FC Köln	6	5	23	32:57	23

Dem 1.FC Kaiserslautern wurden dabei wegen Lizenz-Verstößen vor Beginn der Saison drei Punkte abgezogen. Addieren wir diese hinzu - denn derartige Feinheiten bleiben bei unseren Überlegungen außer Betracht - so ergibt sich in der ersten Spalte eine Verschiebung der Plätze 13 bis 15, die wir in Klammern notiert haben.

Beim Erstellen der Tabelle spielt es keine Rolle, in welchen Spielen die Punkte gesammelt wurden. Es kommt nur auf die Anzahl an. Insbesondere ist es vollkommen belanglos, ob die Punkte gegen starke Gegner oder schwache eingefahren wurden. Einiges spricht jedoch dafür, daß im ersten Fall besser bewertet werden sollte, da die Punkte härter erkämpft wurden.

Im folgenden stellen wir ein anderes Plazierungssystem vor, welches dieser Schwäche des derzeitigen Systems Rechnung trägt. Vereine, die Punkte gegen starke Mannschaften erkämpfen, werden besser belohnt als solche, die die Punkte in Spielen gegen schwache Mannschaften sammeln.

Das Verfahren ist nicht neu (siehe etwa [2]. Es wird zum Beispiel in ähnlicher Form auch von Suchmaschinen (etwa Google) im Internet benutzt, um die Liste der Webseiten zu einem festen Begriff zu ordnen. Dabei stehen diejenigen Seiten an oberster Stelle in der Liste, auf die am häufigsten zugegriffen wurde. Die Reihenfolge der Bewertung wird von einem Eigenvektor zum Perron-Frobenius Eigenwert einer speziellen Bewertungsmatrix B geliefert (siehe [4]). Weitere schöne Beispiele findet man in [3].

Zurück zur Bundesliga. Was soll diese Matrix B im Fußball sein? Dazu numerieren wir die Vereine von 1 bis 18, etwa wie in der obigen Tabelle. Also
$1 =$ Werder Bremen, $2 =$ Bayern München, $\ldots$, $18 =$ 1.FC Köln.
Nun bilden wir die Bewertungsmatrix

$$B = (b_{i,j}) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,18} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{18,1} & \ldots & b_{18,18} \end{pmatrix},$$

wobei $b_{i,j}$ die Anzahl der Punkte ist, die der Verein i gegen den Verein j im Hin- und Rückspiel erkämpft hat. Offensichtlich ist $b_{i,i} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, 18$. Zum Beispiel ergibt sich der Wert $b_{2,16}$ aus den beiden Spielen zwischen Bayern München und Frankfurt, also $b_{2,16} = 4$, denn Bayern hat im Hinspiel $3 : 1$ gewonnen und im Rückspiel $1 : 1$ gespielt. Für die Saison 2003/04 ergibt sich somit die folgende Bewertungsmatrix

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 6 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 4 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 \\
3 & 1 & 0 & 6 & 0 & 4 & 6 & 3 & 6 & 6 & 4 & 6 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 1 & 6 & 6 & 4 & 1 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 & 2 \\
2 & 3 & 6 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 \\
3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 3 & 6 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 & 3 \\
1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 3 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 6 \\
1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 3 & 6 & 6 & 6 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 4 & 6 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 6 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 6 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 & 4 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 6 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Die Theorie von Perron-Frobenius (siehe [1], Kapitel IV, §1) besagt nun folgendes:

Es gibt eine reelle Zahl $b > 0$ (sog. Perron-Frobenius Eigenwert von B) und einen (bis auf Skalare) eindeutigen Vektor

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{18} \end{pmatrix}
$$

mit reellen Einträgen $x_i > 0$ für alle i, so daß $Bx = bx$ ist. In Gleichungen ausgeschrieben heißt dies

$$
\sum_{j=1}^{18} b_{i,j} x_j = b x_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, 18.
$$

Um die Tabelle zu erstellen, verfahren wir nun wie folgt:

Auf Platz 1 erscheint derjenige Verein i, für den x_i am größten ist, also $x_i = \max_j x_j$. Platz 2 erhält der Verein k , wobei x_k der zweitgrößte Wert der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$ ist, u.s.w.. Die positive reelle Zahl x_i gibt dementsprechend den Wert des Vereins i an. Eine Relation $x_i > x_k$ besagt also, daß der Verein i stärker als der Verein k in der Saison gespielt hat.

Was haben wir mit diesem Verfahren gegenüber dem in der Bundesliga gängigen Punktesystem zusätzlich erreicht? Dazu betrachten wir die Gleichung

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{18} b_{i,j} x_j = b x_i$$

für ein festes i. Man beachte, daß x_i den Wert des Vereins i angibt, also seine spielerische Stärke. Sei $j \neq i \neq k$ und $x_j > x_k$, d.h., der Verein j ist stärker als der Verein k. Angenommen $b_{i,j} = b_{i,k}$, d.h., der Verein i macht gegen den Verein j genauso viele Punkte wie gegen den Verein k. Der Beitrag $b_{i,j}x_j$ in $(*)$ zum Wert von x_i, den der Verein i aus den Spielen gegen den Verein j erkämpft hat, ist größer als $b_{i,k}x_k$, also den Beitrag aus den Spielen gegen den Verein k. Punkte gegen stärkere Mannschaften bringen also für den Verein i mehr ein als gegen schwächere.

Zur Berechnung des Perron-Frobenius Eigenwertes b und eines zugehörigen Eigenvektors x kann man im Gegensatz zum ähnlichen Problem bei Suchmaschinen im Internet - denn die Matrix B hat dann viele Millionen Einträge - ein gängiges Computeralgebra System benutzen. Mit Hilfe von MAPLE erhält man für unsere Matrix B gerundet den Eigenwert $b = 44,2936$ und als Vektor x (bis auf Skalare, Werte ebenfalls gerundet)

$$x = \begin{pmatrix} 0.6517 \\ 0.6110 \\ 0.5969 \\ 0.5826 \\ 0.5293 \\ 0.4929 \\ 0.4431 \\ 0.4257 \\ 0.3973 \\ 0.3547 \\ 0.3401 \\ 0.3550 \\ 0.4472 \\ 0.3215 \\ 0.3317 \\ 0.3614 \\ 0.2645 \\ 0.2247 \end{pmatrix}.$$

Die Werte der Einträge x_i im Vektor x liefern nun die folgenden Platzierungen. Zum Vergleich haben wir die Reihung nach dem Punktesystem in der zweiten Spalte in Klammern geschrieben.

1.	(1.)	Werder Bremen
2.	(2.)	Bayern München
3.	(3.)	Bayer Leverkusen
4.	(4.)	VfB Stuttgart
5.	(5.)	VfL Bochum
6.	(6.)	Borussia Dortmund
7.	(13./14.)	SC Freiburg
8.	(7.)	Schalke 04
9.	(8.)	Hamburger SV
10.	(9.)	Hansa Rostock
11.	(16.)	Eintracht Frankfurt
12.	(12.)	Hertha BSC Berlin
13.	(10.)	VfL Wolfsburg
14.	(11.)	Borussia Mönchengladbach
15.	(15./13.)	Kaiserslautern
16.	(14./15.)	Hannover 96
17.	(17.)	1860 München
18.	(18.)	1.FC Köln

Was hat sich gegenüber dem in der Bundesliga benutzten Punktesystem geändert? An den ersten entscheidenden Plätzen - diese spielen international weiter - offenbar nichts. Dies muß nicht so sein. Am Ende der Tabelle sieht es jedoch anders aus. Frankfurt wird sich freuen, denn es steigt nicht in die zweite Liga ab. Dafür muß Hannover gehen. Im Mittelfeld hat sich auch einiges bewegt. Insbesondere hat Freiburg einen großen Sprung nach oben gemacht, von Platz 13 (bzw. 14, wenn die Strafe für Kaiserslautern nicht berücksichtigt wird) auf Platz 7. Dies kommt daher, daß der Verein gegen starke Mannschaften gut gepunktet hat, was durch unser Bewertungsverfahren auch belohnt wird. Kaiserslautern hat gegen schwächere Vereine Punkte eingefahren, so daß auch ohne Berücksichtigung der Strafe nur der Platz 15 herauskommt.

Für die spanische erste Liga erhält man für die Saison 2003/2004 die folgende Tabelle. Die erste Spalte liefert die Plazierung mittels des Perron-Frobenius Eigenvektors, die zweite nach dem üblichen Punktesystem.

Perron-Frobenius	*Punktesystem*
Valencia	Valencia
Barcelona	Barcelona
Deportivo	Deportivo
Real Madrid	Real Madrid
Athletic Bilbao	Athletic Bilbao
Villareal	Sevilla
Atlético Madrid	Atlético Madrid
Sevilla	Villareal
Marllorca	Betis
Osasuna	Málaga
Betis	Mallorca
Málaga	Osasuna
Zaragoza	Zaragoza
Real Sociedad	Albacete
Albacete	Real Sociedad
Racing Santander	Espanyol
Valladolid	Racing Santander
Espanyol	Valladolid
Celta	Celta
Murcia	Murcia

Wie bei der ersten Bundesliga hat sich auch hier auf den ersten Plätzen nichts geändert. Statt Valladolid muß nun Espanol in die zweite Liga.

Bei dem hier vorgestellten Verfahren kann es vorkommen, daß $x_i = x_j$ für $i \neq j$ ist, so daß in diesem Fall für die exakte Platzierung wie bei Punktegleichstand ein weiteres Kriterium herangezogen werden muß, etwa das Torverhältnis. Eine allgemeine Charakterisierung derartiger Extremfälle ist uns nicht bekannt.

Die beiden gerechneten Beispiele geben Anlaß, daß das hier vorgestellte System weniger empfindlich auf den ersten Plätzen reagiert. Im deutschen System hat sich auf den ersten sechs Plätzen nichts bewegt, im spanischen auf den erten fünf. Anders sieht es jodoch am Ende der Tabelle aus. Sowohl in der 1. Bundesliga als auch in der 1. Spanischen Liga muß jeweils ein anderer Verein in die zweite Liga absteigen.

Literatur

[1] B. Huppert. Angewandte Lineare Algebra. DeGruyter, Berlin New York 1990.

[2] J.P. Keener. The Perron-Frobenius Theorem and the ranking of football teams. Siam Review 35 (1993), 80-93.

[3] C.R. MacCluer. The many proofs and applications of Perron's Theorem. Siam Review 42 (2000), 487-498.

[4] H.S. Wilf. Seaching the web with eigenvectors. Preprint 2001.